ELECTRONIQUE / ROBOTIQUE

"2014" PDF

# Utilisation pratique des Nombres Complexes.

## en Electricité et Electronique / Robotique...

## Le Sommaire:



---------------------------------------

### 1- Forme algébrique: (ou forme cartésienne)

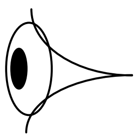
Voici un nombre complexe que nous appellerons $\underline{Z}$ (avec une barre en dessous pour bien montrer qu'il s'agit d'un nombre complexe).
La forme algébrique est une façon de représenter un nombre complexe :

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{Z} = 2 + 3j \\ (\text{ou } 2 + 3 \times j)\end{array}}$$

$\underline{Z}$ se lit « Z complexe » ou « nombre complexe Z »
2 + 3j se lit « deux plus trois j »

Remarque :

En mathématiques, on utilise: i et en électronique c'est: j



$\boxed{\underline{Z} = 2 + 3i}$ ⟹ « deux plus trois i »

## 2- Partie réelle et partie imaginaire:

Un nombre complexe possède une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\boxed{\underline{Z} = \underbrace{2}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{3}_{\text{partie imaginaire}} \times j}$$

j est le nombre imaginaire unité.

Remarques :

- Un nombre réel est un nombre complexe qui n'a pas de partie imaginaire :

  $\boxed{-12{,}5+0\,j}$

  ou plus simplement :

  $\boxed{-12{,}5}$

- Un nombre imaginaire est un nombre complexe qui n'a pas de partie réelle :

  $\boxed{0+3j}$

  ou plus simplement :

  $\boxed{3j}$

**Question n°1** : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :
5,2 j – 2,5 ?
**Question n°2** : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?
**Question n°3** : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

(Solution à la fin de ce cours).

## 3- Addition ou soustraction des nombres complexes:

Les parties réelles s'additionnent (ou se soustraient).
Les parties imaginaires s'additionnent (ou se soustraient).

Soit : $\underline{Z}_1 = 5+7j$

et : $\underline{Z}_2 = -2+j$

Addition :

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 5+7j-2+j = (5-2)+(7+1)j = 3+8j$$

Soustraction :

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = 5+7j-(-2+j) = 5+7j+2-j = (5+2)+(7-1)j = 7+6j$$

**Question n°4 :** Additionner les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
**Question n°5** : Soustraire les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

## 4- Multiplication d'un nombre réel et d'un nombre complexe:

Soit : $\underline{Z} = 3 + 5j$

Multiplions le nombre complexe $\underline{Z}$ par le nombre réel 8 :

$8 \times \underline{Z} = 8 \times (3 + 5j)$

On développe :

$8 \times (3 + 5j) = 8 \times 3 + 8 \times 5j$

$= 24 + 40j$

## 5- Multiplication de deux nombres complexes:

Les choses se compliquent !

j, le nombre imaginaire unité, a la propriété étonnante suivante :

$j \times j = -1$

ou

$j^2 = -1$

ou

$\frac{1}{j} = -j$

« j fois j est égal à -1 »
« j au carré est égal à -1 »

Soit : $\underline{Z}_1 = 6 + 3j$

et : $\underline{Z}_2 = 5 + 2j$

Multiplication :

$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = (6 + 3j) \times (5 + 2j)$

On développe :

$(6 + 3j) \times (5 + 2j) = 6 \times 5 + 6 \times 2j + 3j \times 5 + 3j \times 2j$

$= 30 + 12j + 15j + 6j^2$ avec : $j^2 = -1$

$= 30 + 12j + 15j - 6$

$= (30 - 6) + (12 + 15)j$

$= 24 + 27j$

**Exemples:**
- **Question n°6** : Multiplier les nombres complexes 1 – j et 4 + 2j.
- **Question n°7** : Multiplier les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
- **Question n°8** : Multiplier les nombres complexes j et 3 + 4j.

## 6- Forme trigonométrique (ou forme polaire) d’un nombre complexe:

La forme trigonométrique est une autre façon de représenter un nombre complexe :

Exemple :

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{Z} = \left(2\,;+\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}\right)\\ \text{ou} : \underline{Z} = (2\,;+60°)\end{array}}$$

## 7– Module et argument:

Un nombre complexe possède un module et un argument :

$$\underline{Z} = \left(\underbrace{2}_{\text{module}}\ ;\underbrace{+\frac{\pi}{3}\mathrm{rad}}_{\text{argument}}\right)$$

Le module du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\boxed{|\underline{Z}| \text{ ou } Z}$

Ici : $|\underline{Z}| = 2$

Le module est un nombre réel positif ou nul.

L’argument d’un nombre complexe est un angle que l’on peut exprimer en degrés (°) ou en radians (180° = π radians).

L’argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z})$

Ici : $\boxed{\arg(\underline{Z}) = +\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}}$

## 8- Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique:

C’est très simple :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{partie réelle} = \text{module} \times \text{cosinus de l'argument}\\ \text{partie imaginaire} = \text{module} \times \text{sinus de l'argument}\end{array}}$$

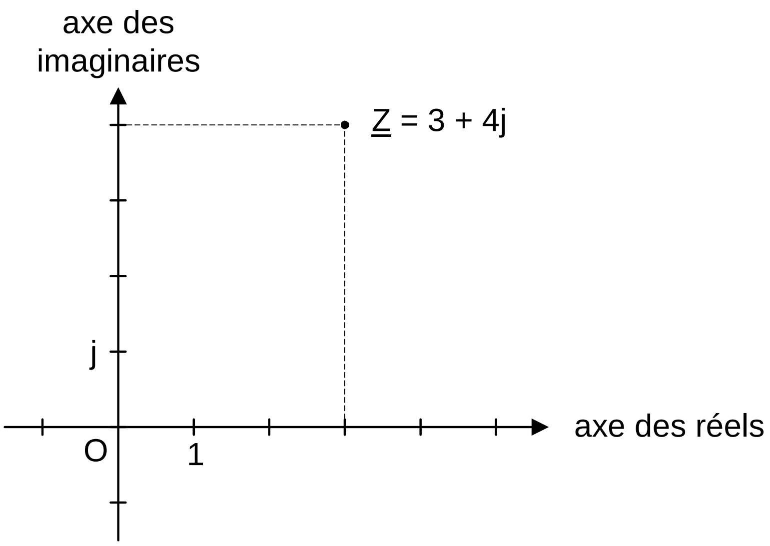
$$\left\{\begin{array}{l}\underline{Z} = \left(2\,;+\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}\right)\\ = 2\times\cos\left(+\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}\right) + 2\times\sin\left(+\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}\right)\mathrm{j}\\ = 2\times\dfrac{1}{2} + 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\\ \boxed{= 1+\sqrt{3}\mathrm{j}}\end{array}\right.$$

## 9- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.

### 9-1- Plan complexe:

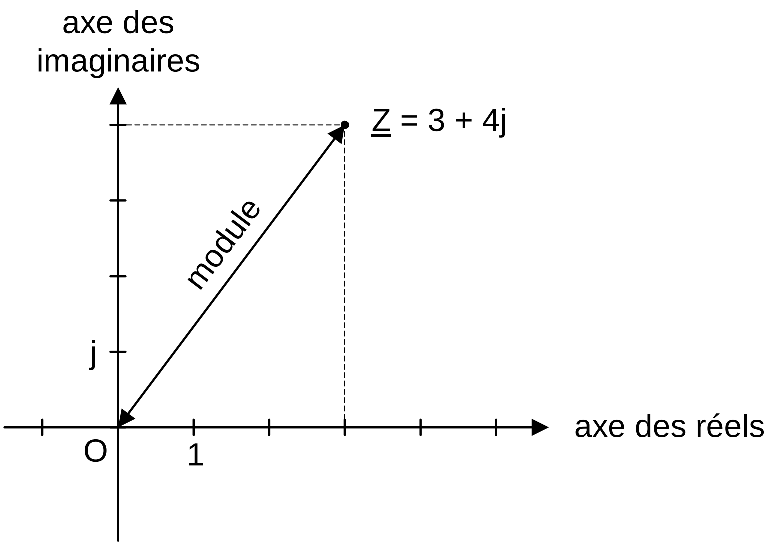
Le plan complexe désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe.

Exemple : $\underline{Z} = 3 + 4j$




En abscisse, nous avons la partie réelle.
En ordonnée, nous avons la partie imaginaire.

### 9-2- Module:




***Le théorème de Pythagore...***

$$\text{module d'un nombre complexe} = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}$$

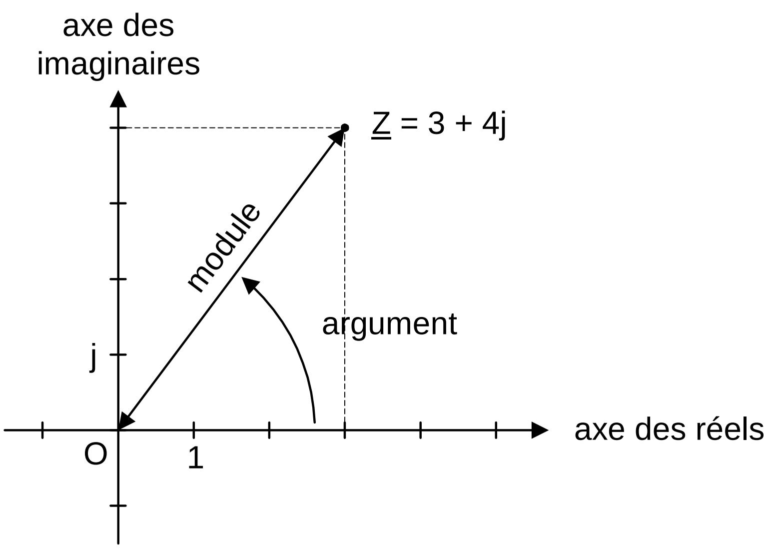
Le module est une grandeur réelle positive (comme la longueur).

Calculons le module du nombre : $\underline{Z} = 3 + 4j$

$$|\underline{Z}| = |3+4j| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \boxed{\sqrt{25} = 5}$$

**Exemples:**
- **Question n°9** : Calculer le module du nombre complexe –1 – 2j.
- **Question n°10** : Calculer le module du nombre imaginaire 5j.
- **Question n°11** : Calculer le module du nombre imaginaire –7j.
- **Question n°12** : Calculer le module du nombre réel – 3,93.

### 9-3- Argument:




L'argument d'un nombre complexe est un angle.

Reprenons le nombre complexe : $\underline{Z} = 3 + 4j$

L'argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z}) = \arg(3+4j)$

Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement positive :

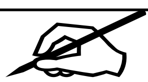
$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)}$$

Application numérique (avec une calculatrice) :

$$\arg(3+4j) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx +53{,}13°$$

$$\arg(3-4j) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53{,}13°$$

N.B. Suivant la marque de la calculatrice, la fonction réciproque de la tangente se note :
**arctan** ou **Shift + tan** ou **tan$^{-1}$** ou **Atn**



Dans le cas particulier où la partie réelle est positive et la partie imaginaire nulle (nombre réel positif), l'argument est nul.

$$\boxed{\arg(8) = 0°}$$

Dans le cas particulier où la partie réelle est négative et la partie imaginaire nulle (nombre réel négatif), l'argument est 180° (ou π radians)

$$\boxed{\arg(-8) = 180°}$$

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire positive, l'argument est + 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ radian)

$$\boxed{\arg(+2j) = +90°}$$

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire négative, l'argument est – 90° (ou $-\frac{\pi}{2}$ radians)

$$\boxed{\arg(-3j) = -90°}$$

**Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement négative :**

En degrés :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)}$$

En radians :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)}$$

$$\arg(-3+4j) = 180° + \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) \approx 180° - 53{,}13° \approx +126{,}87°$$

$$\arg(-3-4j) = 180° + \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) \approx 180° + 53{,}13° \approx +233{,}13° \approx -126{,}87°$$

**Question n°13** : Calculer l'argument du nombre complexe 2 + 2j.
**Question n°14** : Calculer l'argument du nombre imaginaire 5j.
**Question n°15** : Calculer l'argument du nombre imaginaire –7j.
**Question n°16** : Calculer l'argument du nombre réel – 3,93.

## 10- Multiplication de deux nombres complexes avec la forme trigonométrique:

Module d'un produit = produit des modules
Argument d'un produit = somme des arguments

$$\text{Soit : } \underline{Z}_1 = \left(3 ;+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et : } \underline{Z}_2 = \left(2 ;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = \left(3 ;+\frac{\pi}{4}\right) \times \left(2 ;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(3 \times 2 ;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6 ;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6 ;+\frac{\pi}{12}\text{rad}\right)$$

$$\boxed{= (6 ;+15°)}$$

$$\text{Soit : } \underline{Z} = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$\text{Calculons : } \underline{Z}^2$$

$$\underline{Z}^2 = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) \times \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$= \left(1 \times 1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$\boxed{= (1 ;+\pi\,\text{rad})}$$

# Remarque :

$$\underline{Z} = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$= 1 \times \cos\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1 \times \sin\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)\text{j}$$

$$= 0 + \text{j}$$

$$= \text{j}$$

$$\underline{Z}^2 = (1 ;+\pi\,\text{rad})$$

$$= 1 \times \cos(+\pi\,\text{rad}) + 1 \times \sin(+\pi\,\text{rad})\text{j}$$

$$= -1 + 0\text{j}$$

$$= -1$$

On retrouve : $\boxed{\text{j}^2 = -1}$

## 11- Division de deux nombres complexes:

Module d'un quotient = quotient des modules du numérateur et du dénominateur
Argument d'un quotient = argument du numérateur – argument du dénominateur

Exemple :

$$\begin{cases} \text{Soit} : \underline{Z}_1 = \left(3 ; +\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{et} : \underline{Z}_2 = \left(2 ; -\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\left(3 ; +\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2 ; -\frac{\pi}{6}\right)} = \left(\frac{3}{2} ; +\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{2} ; +\frac{5\pi}{12}\text{rad}\right) = (1{,}5 \ ; +75°)$$

**Exemple :**

$$\left|\frac{5+12j}{3-4j}\right| = \frac{|5+12j|}{|3-4j|} = \frac{\sqrt{(5)^2+(12)^2}}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\arg\left(\frac{5+12j}{3-4j}\right) = \arg(5+12j) - \arg(3-4j) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\approx 67{,}38° + 53{,}13° \approx +120{,}51°$$

**Cas particulier :** $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$

alors : $|\underline{Y}| = \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \frac{1}{|\underline{Z}|}$

$$\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$$

$$\text{Soit} : \underline{Z} = \left(1 ; +\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\left(1 ; +\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)} = \left(1 ; -\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

## Remarque :

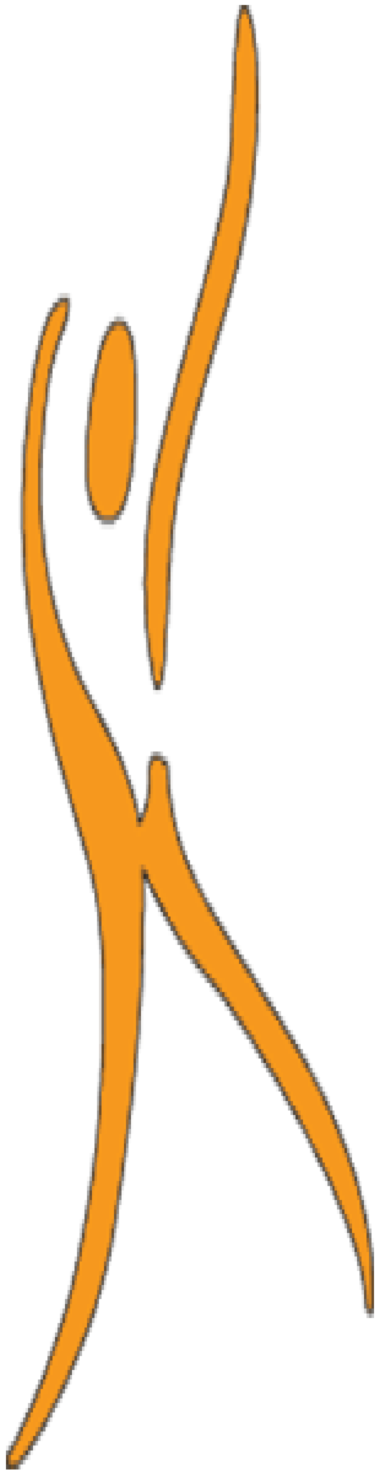
$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \left(1;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) \\
&= 1\times\cos\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)+1\times\sin\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)j \\
&= 0+j
\end{aligned}$$

$$\boxed{= j}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\underline{Z}} &= \left(1;-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) \\
&= 1\times\cos\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)+1\times\sin\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)j \\
&= -1+0j
\end{aligned}$$

$$\boxed{= -1}$$

On retrouve : $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{j} = -j}$



### 12- Nombre complexe conjugué:

$\underline{Z}$* désigne le conjugué du nombre complexe $\underline{Z}$.

## Par définition :

$$\begin{cases} \underline{Z} = x + yj \\ \underline{Z}^* = x - yj \end{cases}$$

x désigne la partie réelle du nombre complexe $\underline{Z}$.
y désigne la partie imaginaire du nombre complexe $\underline{Z}$.

2 – 3j est le conjugué de 2 + 3j.
j est le conjugué de –j.
5 est le conjugué de 5.

## Propriétés :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\underline{Z}+\underline{Z}^* = 2x \\
&\underline{Z}-\underline{Z}^* = 2yj \\
&|\underline{Z}| = |\underline{Z}^*| = \sqrt{x^2+y^2} \\
&\underline{Z}\times\underline{Z}^* = |\underline{Z}|^2 = x^2+y^2 \\
&\arg(\underline{Z}^*) = -\arg(\underline{Z})
\end{aligned}}$$

## 13- Exemples d’application en électricité , les impédances complexes:

En électricité, on peut caractériser le comportement d’un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l’on appelle « impédance complexe ».

Ainsi l’impédance complexe d’une résistance est : $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{Z}_R = R}$

(R est la résistance en ohms).

L’impédance complexe d’une bobine est : $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$

(L est l’inductance en henry, et ω la pulsation du courant en rad/s)

L’impédance complexe d’un condensateur est : $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}}$

(C est la capacité en farad, et ω la pulsation du courant en rad/s)

### 13-1- Exemple n°1 ; Circuit RLC série:

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série.
L’impédance complexe de l’association est alors :

$$\Rightarrow \boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

**a.** Donner l’expression de la partie réelle de l’impédance complexe $\underline{Z}$.

Réponse : $\boxed{R}$

**b.** La réactance X correspond à la partie imaginaire de l’impédance complexe $\underline{Z}$.
Donner son expression.

Réponse : $\Rightarrow$ $\boxed{X = L\omega - \frac{1}{C\omega}}$

**c.** L’impédance de l’association (en ohms) correspond au module de l’impédance complexe.
Donner son expression.

Réponse :

$$\text{module} = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}$$

$$|\underline{Z}| = \left|R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

**d.** Le déphasage entre tension et courant est donné par l’argument de l’impédance complexe.

Réponse :

$$\arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

## 13-2- Exemple n°2 : Circuit RL parallèle...

On associe une résistance et une bobine en parallèle.
L'impédance complexe de l'association est alors :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_R \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{R \times jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

**a.** L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe. Donner son expression.

Réponse :

$$|\underline{Z}| = \left|\frac{jRL\omega}{R + jL\omega}\right| = \frac{|jRL\omega|}{|R + jL\omega|} = \frac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

**b.** Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe. Donner son expression.

Réponse :

$$\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{jRL\omega}{R + jL\omega}\right) = \arg(jRL\omega) - \arg(R + jL\omega) = +\frac{\pi}{2}\,\text{rad} - \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

## 14- Exemple d'application en électronique : Fonction de transfert d'un filtre...

En électronique, on peut caractériser le comportement d'un filtre avec un nombre complexe que l'on appelle « fonction de transfert ».

Voici la fonction de transfert d'un filtre RC passe-bas du 1er ordre :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

**a.** L'amplification du filtre correspond au module de la fonction de transfert. Donner son expression.

Réponse :

$$|\underline{T}| = \left|\frac{1}{1 + jRC\omega}\right| = \frac{|1|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

**b.** Le déphasage entre la sortie et l'entrée est fourni par l'argument de la fonction de transfert. Donner son expression.

Réponse :

$$\arg(\underline{T}) = \arg\left(\frac{1}{1+jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1+jRC\omega) = 0 - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1}\right)$$
$$= -\arctan(RC\omega)$$

# 15- Réponse aux questions:

Question n°1 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :

5,2 j – 2,5 ?

**Partie réelle : – 2,5**
**Partie imaginaire : + 5,2**

Question n°2 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?

**π = π + 0j**
**Partie réelle : π**
**Partie imaginaire : 0**

Question n°3 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

**j = 0 + 1×j**
**Partie réelle : 0**
**Partie imaginaire : 1**

Question n°4 : Additionner les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

**(3 – 4j) + (3 + 4j) = (3 + 3) + (– 4 + 4)j = 6 + 0j = 6**
**La partie imaginaire est nulle : le résultat est un nombre réel « pur ».**

Question n°5 : Soustraire les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

**(3 – 4j) – (3 + 4j) = (3 – 3) + (– 4 – 4)j = 0 – 8j = – 8j**
**La partie réelle est nulle : le résultat est un nombre imaginaire « pur ».**

Question n°6 : Multiplier les nombres complexes 1 – j et 4 + 2j.

**$(1 - j)\times(4 + 2j) = 1\times4 + 1\times2j - j\times4 - j\times2j = 4 + 2j - 4j - 2j^2$**
**$= 4 + 2j - 4j + 2$ $\quad (j^2 = -1)$**
**$= 6 - 2j$**

Question n°7 : Multiplier les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

**$(3 - 4j)(3 + 4j) = 3\times3 + 3\times4j - 4j\times3 - 4j\times4j$**
**$= 9 + 12j - 12j - 16j^2$**

**= 9 + 12j – 12j + 16 ($j^2 = -1$)**
**= 25 + 0j**
**= 25**

**La partie imaginaire est nulle : le résultat est un nombre réel « pur ».**

Question n°8 : Multiplier les nombres complexes j et 3 + 4j.

**$j(3 + 4j) = 3j + 4j^2 = 3j - 4$ ($j^2 = -1$)**
**$= -4 + 3j$**

Question n°9 : Calculer le module du nombre complexe –1 – 2j.

$$|-1-2j| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Question n°10 : Calculer le module du nombre imaginaire 5j.

$$|5j| = |0+5j| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$$

Question n°11 : Calculer le module du nombre imaginaire –7j.

**D'après la question n°10 :**
$$|-7j| = |-7| = 7$$

Question n°12 : Calculer le module du nombre réel – 3,93.

$$|-3.93| = 3{,}93$$
**Pour un nombre réel, le module correspond à la valeur absolue.**

Question n°13 : Calculer l'argument du nombre complexe 2 + 2j.

$$\arg(2+2j) = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = +45°$$

Question n°14 : Calculer l'argument du nombre imaginaire 5j.

**arg(5j) = +90°**

Question n°15 : Calculer l'argument du nombre imaginaire –7j.

**arg(-7j) = - 90°**

Question n°16 : Calculer l'argument du nombre réel – 3,93.

**arg(-3,93) = 180°**

La fin de ce poly !